ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Διάλεξη 1η
08/10/2018

(Βιβλιογραφία: "Φίλος" + στο site του κ. Πουρναρά για ασκήσεις κ.τ.λ.)

Διαφορική εξίσωση: Είναι μια εξίσωση της μορφής

$$F(\underbrace{t}_{\text{ανεξ. μεταβλ.}}, x(t), x'(t), x''(t), \ldots, x^{n}(t)) = 0$$

(*) Θα ασχοληθούμε μόνο με γραμμικές πρώτης τάξης.

Νόμος του Νεύτωνα: $F = m \cdot \gamma = m \cdot (x')'$ → είναι μια διαφορική εξίσωση 2ης τάξης.

(*) Στο μάθημα αυτό θα ασχοληθούμε με συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, δηλαδή με διαφορικές εξισώσεις μιας ανεξάρτητης μεταβλητής. Ωστόσο υπάρχει και η κατηγορία των μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Μερικές διαφορικές εξισώσεις: $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial xy}\right)$: Θα υπάρχουν περισσότερες από μια μεταβλητές και συνεπώς και περισσότεροι παράγωγοι.//

Εξίσωση με υστέρηση: $y'(t-\tau) = 2y(t)$, $\tau > 0$

Ποια η (ποιοτική) διαφορά των 2 παρακάτω ολοκληρωμάτων:

$$\int \frac{dx}{x^2+y^2} \quad \text{και} \quad \int \frac{x\,dx}{x^2+y^2}$$

$$\hookrightarrow \int \frac{dx}{x^2+y^2} = \left(\frac{y}{x}\right)\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{ενώ} \quad \int \frac{x\,dx}{x^2+y^2} = \frac{\ln(x^2+y^2)}{2}$$

π.χ

$$\underbrace{y'(t) = f(t) = t+2 \;,\; t \geq 5}$$

Μπορεί να λυθεί είτε με αόριστη είτε με ορισμένη ολοκλήρωση.

(i) Αόριστη ολοκλήρωση: $\int y'(t)\,dt = \int (t+2)\,dt$

$$\Rightarrow \underbrace{y(t) = \frac{t^2}{2} + t2 + \underline{\underline{c}}}$$

ανάλογα με την τιμή της σταθ. c, υπάρχουν πολλές διαφορετικές συναρτήσεις.

(ii) Ορισμένη ολ/ση: (επιλέγω μια συν/ση) $\int_{13}^{t} y'(s)\,ds = \int_{13}^{t} (s+2)\,ds = y(t) - y(13)$

$$\Rightarrow \underbrace{y(t) = y(13) + \frac{t^2}{2} + 2t + \dots}$$

Αφού "παίρνει" την τιμή 13 επιλέγω μια συνάρτηση για την τιμή 13. Πιο γενικά μπορεί να πάρω αντί για την τιμή 13 μια γενική τιμή t_0 και $\int_{t_0}^{t} y'(s)\,ds = \dots$

! Το ολοκλήρωμα συνεχούς συν. είναι συνεχής συνάρτηση. Αν f συνεχής συνάρτηση $\Rightarrow \int f(t)\,dt$: παραγωγίσιμη.

~o~o~o~o~o~o~o

Γενικά: $y'(t) = p(t)q(y)\,,\; t \in I \Rightarrow \frac{y'(t)}{q(y)} = p(t)\,,\; t \in I\,,\; t_0 \in I$

$q(y) \neq 0$, δηλ. παίρνω τιμή του y που δεν μηδενίζει το $q(y)$

$\int \frac{y'(t)}{q(y)}\,dt = \int p(t)\,dt$ και $\int_{t_0}^{t} \frac{y'(s)\,ds}{q(y(s))} = \int_{t_0}^{t} p(s)\,ds \overset{\text{αλλαγή μεταβλ.}}{\Longrightarrow}$

$$\Rightarrow \int_{y(t_0)}^{y(t)} \frac{dy}{q(y)} = \int_{t_0}^{t} p(s)\,ds$$

$$\Rightarrow Q(y(t)) = Q(y(t_0)) + \int_{t_0}^{t} p(s)\,ds.$$

π.χ

$y'(t) = y^2(t)(t+1)\,,\; t \geq 0$

$\frac{y'(t)}{y^2(t)} = t+1 \Rightarrow$

$\frac{dy}{y^2} = \frac{t^2}{2} + t + c.$